广 州 高 山 文 化 培 训 学 校

2018 届文科数学

2018.06.01

第 I 卷（共 60 分）

一、选择题：（每小题 5 分,共 60 分.下列每小题所给选项只有一个项符合题意，请将正确答案的序号填涂在答题卡上）

1. 设集合 $A=\{x\left|0.4^x<1\right.\}$,集合 $B=\{x\mid y=\lg\left(x^2-x-2\right)\}$,则集合 $A\cup\left(C_R B\right)=$（　　）

A. $\left(0,2\right]$　　B. $\left[0,+\infty\right)$　　C. $\left[-1,+\infty\right)$　　D. $\left(\infty,-1\right)\cup\left(0,+\infty\right)$

2. 已知复数 $z=a+\dfrac{a+i}{3-i}$（$a\in R$， i 为虚数单位),若复数 z 的共轭复数的虚部为 $-\dfrac{1}{2}$,则复数 z 在复平面内对应的点位于（　　）

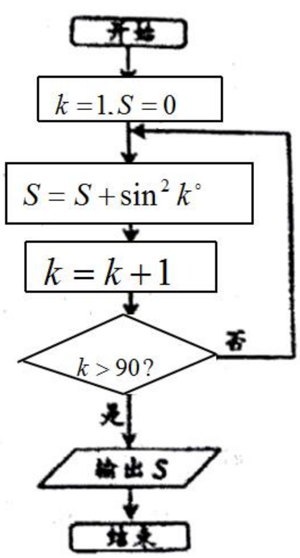
A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 若 $x_1, x_2, \cdots, x_{2018}$ 的平均数为 3，方差为 4,且 $y_i=-2\left(x_i-2\right), i=x_1, x_2, \cdots, x_{2018}$，则新数据 $y_1, y_2\cdots$ 的平均数和标准差分别为（　　）

A. -4　-4　　B. -4　16　　C. 2　8　　D. -2　4

4. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为抛物线 $y^2=-12x$ 的焦点，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$,则实数 $a=$（　　）

A. 3　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$



5. 运行如图所示程序,则输出的 S 的值为（　　）

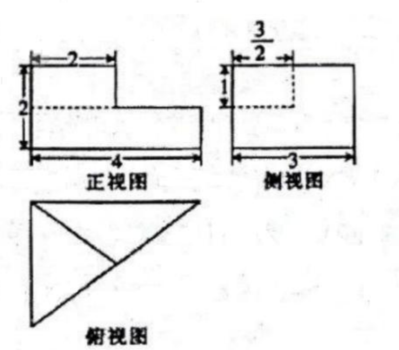
A. $44\dfrac{1}{2}$　　B. $45\dfrac{1}{2}$　　C. 45　　D. $46\dfrac{1}{2}$

6. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$， $a\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $\cos\left(2a+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值为（　　）

A. $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$　　B. $\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$　　C. $\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$

7. 如图是某几何体的三视图,则该几何体的体积为（　　）

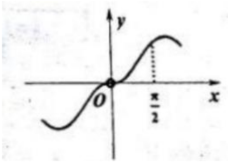
A．6　　B．9　　C. 12　　D．18

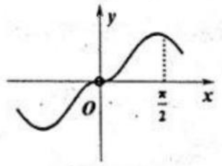


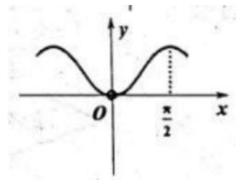
8. 已知 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=2$,点 C 在线段 AB 上,且 $\left|\overrightarrow{OC}\right|$ 的最小值为 1,则 $\left|\overrightarrow{OA}-t\overrightarrow{OB}\right|$（$t\in R$）的最小值为（　　）

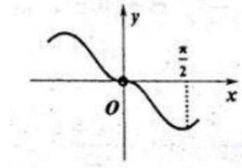
A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

9. 函数 $\mathrm{y}=\dfrac{2\sin x}{1+\dfrac{1}{x^{2}}}(x\in[-\dfrac{3\pi}{4},0)\cup(0,\dfrac{3\pi}{4}])$ 的图像大致是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

10. 若抛物线 $y^{2}=4x$ 的焦点是 F ,准线是 l ,点 $M\left(4,m\right)$ 是抛物线上一点，则经过点 F 、M 且与 l 相切的圆共（　　）

A.　0 个　　B.1 个　　C. 2 个　　D.4 个

11. 设函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.若 $x_{1}x_{2}<0$,且 $f\left(x_{1}\right)+f\left(x_{2}\right)=0$，则 $\left|x_{2}-x_{1}\right|$ 的取值范围为（　　）

A.　$(\dfrac{\pi}{6},+\infty)$　　B.　$(\dfrac{\pi}{3},+\infty)$　　C.　$(\dfrac{2\pi}{3},+\infty)$　　D.　$(\dfrac{4\pi}{3},+\infty)$

12. 对于函数 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$，设 $\alpha\in\left\{x/f\left(x\right)=0\right\}$; $B\in\{x/g\left(x\right)=0\}$,若所有的 α , β ，都有 $\left|\alpha-\beta\right|\leq1$，则称 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 互为“零点相邻函数”. $f(x)=e^{x-1}+x-2$ 与 $g\left(x\right)=x^{2}-ax-a+3$ 互为“零点相邻函数”,则实数 a 的取值范围是（　　）

A.　$\left[2,4\right]$　　B. $[2,\dfrac{7}{3}]$　　C. $[\dfrac{7}{3},3]$　　D. $\left[2,3\right]$

第Ⅱ卷（非选择题 90 分）

二、填空题（每题 5 分，共 20 分，把每小题的答案填在答卷纸的相应位置）

13. 若数列 $\left\{a_{n}\right\}$ 是等差数列，对于 $b_{n}=\dfrac{1}{n}(a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{n})$，则数列 $\left\{b_{n}\right\}$ 也是等差数列.类比上述性质,若数列 $\left\{c_{n}\right\}$ 是各项都为正数的等比数列,对于 $d_{n}>0$，当 $d_{n}=$ ____________时，数列 $\left\{d_{n}\right\}$ 也是等比数列.

14. 函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $M(2,f(2))$ 处的切线方程是 $y=2x-8$,则 $\dfrac{f'(2)}{f(2)}$ __________.

15. 已知 a 是区间 $\left[1,7\right]$ 上的任意实数,直线 $l_{1}:ax-y-2a-2=0$ 与不等式组 $\begin{cases}x\geq m\\ x+y\leq8\\ x-3y\leq0\end{cases}$ 表示的平面区域总有公共点，则直线 $l:mx-3y+n=0(m,n\in R)$ 的倾斜角 α 的取值范围为__________.

16. 设锐角 ΔABC 三个内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c ,若 $\sqrt{3}\left(a\cos B+b\cos A\right)=2c\sin C,b=1$，则 c 的取值范围为__________.

三、解答题（共 6 个小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

已知数列$\left\{a_n\right\}$为公差不为 0 的等差数列，$a_2=3$，且$\log_2 a_1,\log_2 a_3$，$\log_2 a_7$成等差数列

（I）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；（II）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前$n$项和$S_n$.

18.（本小题满分 12 分）

在测试中,客观题难题的计算公式为$P_i=\dfrac{R_i}{N}$,其中P_i为第i题的难度，R_i为答对该题的人数，N为参加测试的总人数.现对某校高三年级 120 名学生进行一次测试，共 5 道客观题.测试前根据对学生的了解，预估了每道题的难度，如下表所示：

题号	1	2	3	4	5
考前预估难度P_i	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4

测试后，从中随机抽取了 10 名学生，将他们编号后统计各题的作答情况，如下表所示("√"表示答对,"×"表示答错)：

学生编号 \ 题号	1	2	3	4	5
1	×	√	√	√	√
2	√	√	√	√	×
3	√	√	√	√	×
4	√	√	√	×	×
5	√	√	√	√	√
6	√	×	×	√	×
7	×	√	√	√	×
8	√	×	×	×	×
9	√	√	×	×	×
10	√	√	√	√	×

（I）根据题中数据，将抽样的 10 名学生每道题实测的答对人数及相应的实测难度填入下表，并估计这 120 名学生中第 5 题的实测答对人数；

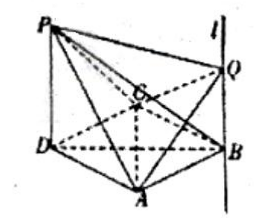
题号	1	2	3	4	5
实测答对人数					
实测难度					

（II）从编号为 1 到 5 的 5 人中随机抽取 2 人，求恰好有 1 人答对第 5 题的概率；

（III）定义统计量$S=\dfrac{1}{n}\left[\left(P_1-P_1\right)^2+\left(P_2-P_2\right)^2+\cdots+\left(P_n-P_n\right)^2\right]$，其中$P_1$为第$i$题的实测难度，$P_i$为第$i$题的预估难度($i=1,2,\cdots,n$).规定：若$S=0.05$，则称该次测试的难度预估合理，否则为不合理.判断本次测试的难度预估是否合理.

19.（本小题满分 12 分）

四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是菱形，且 $PD=DA=2$，$\angle CDA=60^\circ$，过点 B 作直线 $l//PD$，Q 为直线 l 上一动点.



（I）求证：$QP\perp AC$；

（II）当面 $PAC\perp$ 面 QAC 时，求三棱锥 $Q-ACP$ 的体积.

20.（本小题满分 12 分）

设点 A、B 的坐标分别为 $(-2,0)(2,0)$,直线 AM,BM 相交于点 M ,且它们的斜率之积是 $-\dfrac{1}{2}$.

（I）求点 M 的轨迹 C 的方程；

（II）直线 $l:y=kx+1$ 与曲线 C 相交于 D,E 两点，若 $Q(0,2)$ 是否存在实数 k，使得 ΔDEQ 的面积为 $\dfrac{4}{3}$？若存在，请求出 k 的值；若不存在，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-ax+a,a\in R$.

（I）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（II）当 $x\ge 1$ 时，函数 $g(x)=(x+1)f(x)-\ln x$ 的图象恒不在 x 轴的上方，求实数 a 的取值范围.

二选一：请考生在 22、23 两题中任选一题作答，并在相应题号前的方框中涂黑.

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中，已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=-1+\sqrt{2-a}\cos\alpha \\ y=1+\sqrt{2-a}\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$a<2$）

（I）当 $a=-2$ 时，若曲线 C 上存在 A,B 两点关于点 $M(0,2)$ 成中心对称，求直线 AB 的斜率；

（II）在以原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}=0$ 的直线 l 与曲线 C 相交于 C,D 两点,若 $|CD|=4$，求实数 a 的值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-5|$，$g(x)=5-|2x-3|$

（I）解不等式 $f(x)<g(x)$；（II）设 $F=f(x^2+y^2)-g(3y+12)$，求证：$F\ge 2$.

广 州 高 山 文 化 培 训 学 校
2018 届文科数学参考答案

一、选择题

1-5: CADCB　　6-10: ABBAD　　11、12：BB

二、填空题

13. $\sqrt[n]{c_1 c_2 \cdots\cdots c_n}$　　14. $-\frac{1}{2}$　　15. $[0,\frac{\pi}{4}]\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$　　16. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$

三、解答题

17.（I）设数列$\{a_n\}$的公差为d由$a_2=3$，且$\log_2 a_1,\log_2 a_3$，$\log_2 a_7$成等差数列，得

$2\log_2 a_3=\log_2 a_1+\log_2 a_7$，即$2\log_2(3+d)=10g_2(3-d)+\log_2(3+5d)$，

得$2\log_2(3+d)^2=\log_2(3-d)(3+5d)$，

得$(3+d)^2=(3-d)(3+5d)$，解得$d=1$或$d=0$(舍去)

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_2+(n-2)\cdot d=3+(n-2)\cdot 1=n+1$.

（II）因为$b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

所以$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2(n+2)}$

18.（I）每道题实测的答对人数及相应的实测难度如下表：

题号	1	2	3	4	5
实测答对人数	8	8	7	7	2
实测难度	0.8	0.8	0.7	0.7	0.2

所以,估计 120 人中有$120\times 0.2=24$人答对第 5 题.

（II）记编号为i的学生为$A_i\left(i=1,2,3,4,5\right)$，从这 5 人中随机抽取 2 人，不同的抽取方法有 10 种.其中恰好有 1 人答对第 5 题的抽取方法为(A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_2,A_4)，(A_2,A_5)，(A_2,A_5)，(A_4,A_5)，共 6 种.

所以,从抽样的 10 名学生中随机抽取 2 名答对至少 4 道题的学生,恰好有 1 人答对第 5 题的概率为$P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

（III）P_1为抽样的 10 名学生中第i题的实测难度，用P_i作为这 120 名学生第i题的实测难度.

$$S=\frac{1}{5}\left[(0.8-0.9)^2+(0.8-0.8)^2+(0.7-0.7)^2+(0.7-0.6)^2+(0.2-0.4)^2\right]=0.012$$

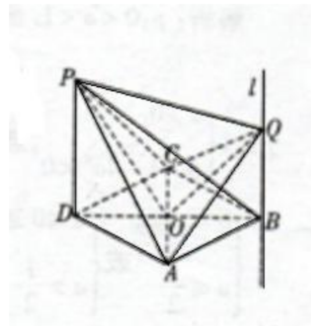
因为$S=0.012<0.05$,所以,该次测试的难度预估是合理的.

19. （I）由题意知直线QP在面$ABCD$上的射影为DB，

又菱形$ABCD$中$DB\perp AC$，由三垂线定理知$QP\perp AC$.

（II）ΔPAC和ΔQAC都是以AC为底的等腰三角形，设AC和BD的交点为O，

连接OP、OQ，则$OP\perp AC$，$OQ\perp AC$，



$\therefore AC\perp$面POQ，面$PAC\perp$面QAC知：$OP\perp OQ$.

在$Rt\Delta POD$中，$OP=\sqrt{7}$，

设$QB=x$，则$Rt\Delta OBQ$中，$OQ=\sqrt{x^2+3}$，

在直角梯形$PDBQ$中，$PQ=\sqrt{(2-x)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{x^2-4x+16}$，

在ΔPOQ中，$PQ=\sqrt{OP^2+OQ^2}=\sqrt{x^2+10}$，

故$\sqrt{x^2-4x+16}=\sqrt{x^2+10}$，解得$x=\dfrac{3}{2}$，即$QB=\dfrac{3}{2}$.

同时$OQ=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$，$S_{\Delta POQ}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{21}}{2}=\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$

$\therefore V_{Q-ACP}=V_{A-POQ}+V_{C-POQ}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta POQ}\cdot AC=\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$.

20.（I）设点M的坐标为(x,y)，因为点A的坐标是$(-2,0)$，

所以直线AM的斜率$k_{AM}=\dfrac{y}{x+2}(x\neq-2)$同理，直线$BM$的斜率$k_{BM}=\dfrac{y}{x-2}(x\neq 2)$

所以$\dfrac{y}{x+2}\cdot\dfrac{y}{x-2}=-\dfrac{1}{2}$化简得点$M$的轨迹方程$C$为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1(x\neq\pm 2)$

（II）设$D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$联立$\begin{cases}y=kx+1\\x^2+2y^2=4\end{cases}$，化为：$(1+2k^2)x^2+4kx-2=0$

$\Delta>0$，$\therefore x_1+x_2=\dfrac{-4k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-2}{1+2k^2}$，

$\therefore |DE|=\sqrt{(1+k^2)\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}=\sqrt{(1+k^2)\left[\dfrac{16k^2}{(1+2k^2)^2}+\dfrac{8}{1+2k^2}\right]}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+2k^2}\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(4k^2+1\right)}$ 点 Q 到直线 l 的距离

$d=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ $\therefore S_{\Delta QAB}=\dfrac{1}{2}d\left|DE\right|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{1+2k^2}\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(4k^2+1\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{1+2k^2}\sqrt{4k^2+1}=\dfrac{4}{3}$，解得：$k^2=\dfrac{1}{4}$，解得 $k=\pm\dfrac{1}{2}$，

因为当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时直线 l 过点 $\left(-2,0\right)$，

当 $k=-\dfrac{1}{2}$ 时直线 l 过点 $\left(2,0\right)$，因此不存在实数 k，使得 ΔDEQ 的面积为 $\dfrac{4}{3}$.

21.（I） $f\left(x\right)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$

①当 $a\le 0$ 时，则 $f'\left(x\right)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

②当 $a>0$ 时，则由 $f'\left(x\right)>0$ 知 $0<x<\dfrac{1}{a}$，由 $f'\left(x\right)<0$ 知 $x>\dfrac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减；

综上，当 $a\le 0$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，

当 $a>0$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$，单调递减区间为 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$.

（II）由题意知：$\left(x+1\right)f\left(x\right)-\ln x\le 0$ 恒成立,

而 $\left(x+1\right)f\left(x\right)-\ln x\le 0\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(\ln x-ax+a\right)-\ln x\le 0\Leftrightarrow x\ln x-a\left(x^2-1\right)\le 0$，

由 $g\left(x\right)=x\ln x-a\left(x^2-1\right)\left(x\ge 1\right)$，得：$g'\left(x\right)=\ln x+1-2ax$.

令 $h(x)=\ln x+1-2ax$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-2a=\dfrac{1-2ax}{x}$，

①若 $a\le 0$， $h'\left(x\right)>0$， $g'\left(x\right)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，故 $g'\left(x\right)\ge g'(1)=1-2a\ge 0$，

所以 $g\left(x\right)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g\left(x\right)\ge g(1)=0$，从而 $x\ln x-a\left(x^2-1\right)\ge 0$，不符合题意；

②若 $0<a<\dfrac{1}{2}$，当 $x\in\left(1,\dfrac{1}{2a}\right)$ 时，$h'(x)>0$， $g'(x)>0$ 在 $\left(1,\dfrac{1}{2a}\right)$ 上单调递增，

从而 $g'(x) > g(1) = 1-2a > 0$，

所以 $g(x)$ 在 $\left[1,\frac{1}{2a}\right)$ 上单调递增，所以 $g(x) \geq g(1) = 0$，

从而在 $\left[1,\frac{1}{2a}\right)$ 上 $x\ln x - a\left(x^2-1\right) \geq 0$，不符合题意；

③若 $a \geq \frac{1}{2}$，$h'(x) \leq 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $g'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，$g'(x) \leq g'(1) = 1-2a \leq 0$，

从而 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x) \leq g(1) = 0$，

所以 $x\ln x - a(x^2-1) \leq 0$ 恒成立，综上所述，a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

22.（I）由题意，得曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1+2\cos\alpha \\ y = 1+2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数)，消去参数，得

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$，圆心 C 的坐标为 $(-1,1)$，因为曲线 C 上存在 A,B 两点关于点 $M(0,2)$ 成中心对称，

所以 $CM \perp AB$，则由 $k_{CM} = \frac{2-1}{0-(-1)} = 1$，得直线 AB 的斜率 $k_{AB} = -\frac{1}{k_{CM}} = -1$.

（II）消去参数，得曲线 C 的普通方程为 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2-a$，

圆心 C 的坐标为 $(-1,1)$，半径为 $\sqrt{2-a}$，又直线 l 的极坐标方程可化为 $\rho\sin\ \theta + \rho\cos\theta + 2 = 0$，其直角坐

标方程为 $x+y+2=0$，所以，$(\frac{|-1+1+2|}{\sqrt{2}})^2 + 2^2 = 2-a$，$\therefore a = -4$.

23.（I）原不等式即 $|x-5| + |2x-3| < 5$，$\therefore \begin{cases} x \geq 5 \\ x-5+2x-3 < 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{3}{2} \leq x \leq 5 \\ 5-x+2x-3 < 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ 5-x+3-2x < 5 \end{cases}$，

所以 $x \in \phi$ 或 $\frac{3}{2} \leq x < 3$ 或 $1 < x < \frac{3}{2}$，即 $1 < x < 3$，原不等式的解集为 $(1,3)$.

（II）$F = |x^2+y^2-5| + |2(3y+12)-3| - 5 = |x^2+y^2-5| + |6y+21| - 5$

$\geq |x^2+y^2-5+6y+21| - 5 = |x^2+(y+3)^2+7| - 5 = x^2+(y+3)^2+2 \geq 2$