

广州高山文化培训学校
2017届数学堂练12（文科）

2017.02.22

一、选择题（每题5分，共60分）

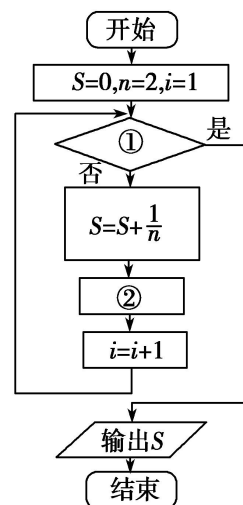
- 若复数 z 满足 $iz = 1 + 2i$ ，其中 i 为虚数单位，则在复平面上复数 z 对应的点的坐标为（ ）
A. $(-2, -1)$ B. $(-2, 1)$ C. $(2, 1)$ D. $(2, -1)$
- 已知全集 $U = \mathbb{R}$ ，集合 $A = \{x | 0 < 2^x < 1\}$ ， $B = \{x | \log_3 x > 0\}$ ，则 $A \cap (C_U B) =$ （ ）
A. $\{x | x < 0\}$ B. $\{x | x > 0\}$ C. $\{x | 0 < x < 1\}$ D. $\{x | x > 1\}$
- 下列选项错误的是（ ）
A. 命题“若 $x \neq 1$ ，则 $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ ”的逆否命题是“若 $x^2 - 3x + 2 = 0$ ，则 $x = 1$ ”
B. “ $x > 2$ ”是“ $x^2 - 3x + 2 > 0$ ”的充分不必要条件
C. 若命题“ $p: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \neq 0$ ”，则“ $\neg p: \exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + x_0 + 1 = 0$ ”
D. 若“ $p \vee q$ ”为真命题，则 p 、 q 均为真命题

4. 椭圆 E 的焦点在 x 轴上，中心在原点，其短轴上的两个顶点和两个焦点恰为边长是 2 的正方形的顶点，则椭圆 E 的标准方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\sqrt{2}} = 1$ B. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$
C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2} = 1$

5. 如图给出了计算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{60}$ 的值的程序框图，其中①②分别是（ ）

- A. $i < 30, n = n + 2$ B. $i = 30, n = n + 2$
C. $i > 30, n = n + 2$ D. $i > 30, n = n + 1$



6. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\pi < \varphi < 0$) 的最小正周期是 π ，将函数 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后所得的函数图象过点 $P(0, 1)$ ，则函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ （ ）

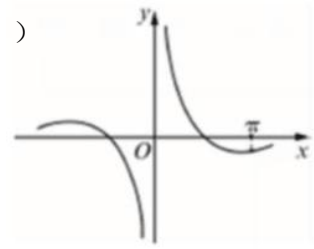
- A. 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递减 B. 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增
C. 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递减 D. 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增

7. 《张丘建算经》卷上第 22 题为“今有女善织，日益功疾，初日织五尺，今一月日织九匹三丈。”其意思为：有一善于织布的女子，从第 2 天开始，每天比前一天多织相同量的布，第 1 天织了 5 尺布，现在一月（按 30 天计算）共织 390 尺布，记该女子一月中的第 n 天所织布的尺数为 a_n ，则 $a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17}$ 的值为（ ）

- A. 55 B. 52 C. 39 D. 26

8. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq a \\ x-y \leq -1 \end{cases}$, 且 $z = x+ay$ 的最小值为 7, 则 $a =$ ()

- A. -5 B. 3 C. -5 或 3 D. 5 或 -3

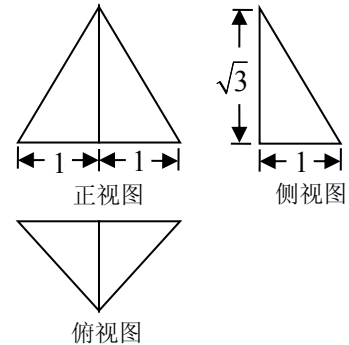


9. 已知函数 $f(x)$ 的部分图像如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可以是 ()

- A. $f(x) = \frac{2-x^2}{2x}$ B. $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$ C. $f(x) = -\frac{\cos^2 x}{x}$ D. $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

10. 一个几何体的三视图如图所示, 其中正视图是一个正三角形, 则这个几何体的 ()

- A. 外接球的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. 表面积为 $\sqrt{7} + \sqrt{3} + 1$
 C. 体积为 $\sqrt{3}$ D. 外接球的表面积为 4π



11. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, M, N 两点在双曲线 C 上, 且 $MN \parallel F_1F_2$, $|F_1F_2| = 4|MN|$, 线段 F_1N 交双曲线 C 于点 Q , 且 $|F_1Q| = |QN|$, 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

12. 设函数 $y = f''(x)$ 是 $y = f'(x)$ 的导数. 某同学经过探究发现, 任意一个三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ 都有对称中心 $(x_0, f(x_0))$, 其中 x_0 满足 $f''(x_0) = 0$.

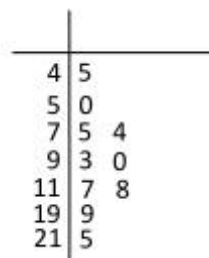
已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{12}$, 则 $f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{3}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) =$ ()

- A. 2013 B. 2014 C. 2015 D. 2016

二、填空题 (每题 5 分, 共 20 分)

13. 已知 $\cos(75^\circ + \theta) = \frac{1}{3}$, θ 为第三象限角, 则 $\cos(-255^\circ - \theta) + \sin(435^\circ + \theta)$ 的值为 _____.

14. 空气质量指数 (简称 AQI) 是定量描述空气质量状况的指数, 空气质量按照 AQI 大小分为六级, 0~50 为优; 51~100 为良; 101~150 为轻度污染; 151~200 为中度污染; 201~300 为重度污染; 大于 300 为严重污染, 某环保人士从当地某年的 AQI 记录数据中, 随机抽取 10 天的 AQI 数据, 用茎叶图记录如右图, 根据该统计数据, 估计此地该年 AQI 大于 100 的天数约为 _____ (该年为 365 天).



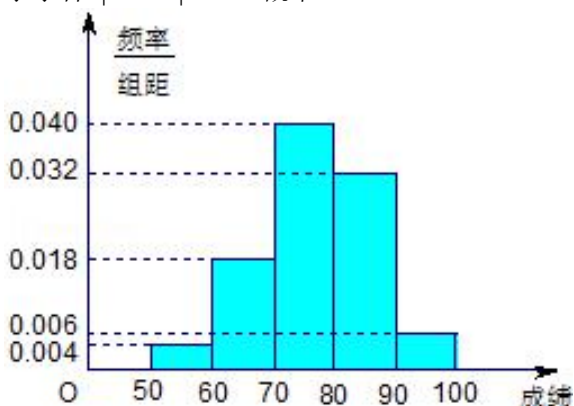
15. 某公司租赁甲、乙两种设备生产 A、B 两类产品, 甲种设备每天能生产 A 类产品 5 件和 B 类产品 10 件, 乙种设备每天能生产 A 类产品 6 件和 B 类产品 20 件. 已知设备甲每天的租赁费为 2000 元, 设备乙每天的租赁费为 3000 元, 现该公司至少要生产 A 类产品 50 件, B 类产品 140 件, 所需租赁费最少为 _____ 元.

16. 矩形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $AD=2$, P 为矩形内部一点(不包含边界), 且 $AP=1$, 若 $AP = xAB + yAD$, 则 $3x + 2y$ 的取值范围是_____.

三、解答题：解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

17. 某班 50 名学生在一次数学测试中, 成绩全部介于 50 与 100 之间, 将测试结果按如下方式分成五组: 第一组 $[50,60)$, 第二组 $[60,70)$, ..., 第五组 $[90,100]$. 如图是按上述分组方法得到的频率分布直方图.

- (I) 若成绩大于或等于 60 且小于 80, 认为合格, 求该班在这次数学测试中成绩合格的人数;
 (II) 从测试成绩在 $[50,60) \cup [90,100]$ 内的所有学生中随机抽取两名同学, 设其测试成绩分别为 m 、 n , 求事件“ $|m-n| > 10$ ”概率.



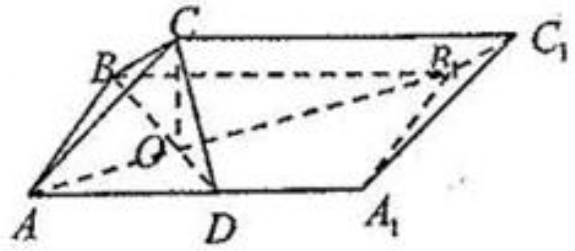
18. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = 9$, a_2 为整数, 且 $S_n \leq S_5$.

- (I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (II) 设数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n \leq \frac{4}{9}$.

19. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 面 ABB_1A_1 为矩形, $AB=BC=1$, $AA_1=\sqrt{2}$, D 为 AA_1 的中点, BD 与 AB_1 交于点 O , $BC \perp AB_1$.

(I) 证明: $CD \perp AB_1$;

(II) 若 $OC = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求四面体 AA_1BC 的体积.



20. 已知点 $A(1,0)$, 点 P 是圆 $C: (x+1)^2 + y^2 = 8$ 上的任意一点, 线段 PA 的垂直平分线与直线 CP 交于点 E .

(I) 求点 E 的轨迹方程;

(II) 若直线 $y = kx + m$ 与点 E 的轨迹有两个不同的交点 P 和 Q , 且原点 O 总在以 PQ 为直径的圆的内部, 求实数 m 的取值范围.

广州高山文化培训学校
2017届数学堂练12答卷（文科）

2017.02.22

姓名_____ 班别_____ 学号_____

二、填空题（每题5分，共20分）

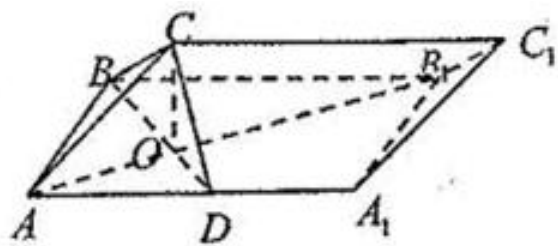
13. _____ 14. _____ 15. _____ 16. _____

三、解答题：解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤。

17.（12分）

18.（12分）

19. (12分)



20. (12分)

广州高山文化培训学校

2017届数学堂练12答案(文科)

2017.02.22

一、选择题(每题5分,共60分)

1—5DADCC 6—10BBBDB 11—12DD

二、填空题(每题5分,共20分)

13. $-\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$ 14. 146 15. 23000 16. $(1, \sqrt{2}]$

三、解答题

17. (I) 由直方图知,成绩在 $[60,80)$ 内的人数为: $50 \times 10 \times (0.18+0.040)=29$.

所以该班在这次数学测试中成绩合格的有29人. 3分

(II) 由直方图知,成绩在 $[50,60)$ 内的人数为: $50 \times 10 \times 0.004=2$,

设成绩为 x, y 5分

成绩在 $[90,100]$ 的人数为 $50 \times 10 \times 0.006=3$, 设成绩为 a, b, c , 6分

若 $m, n \in [50,60)$ 时, 只有 xy 一种情况, 7分

若 $m, n \in [90,100]$ 时, 有 ab, bc, ac 三种情况, 8分

若 m, n 分别在 $[50,60)$ 和 $[90,100]$ 内时, 有

	a	b	c
x	xa	xb	xc
y	ya	yb	yc

共有6种情况, 所以基本事件总数为10种, 9分

事件“ $|m-n|>10$ ”所包含的基本事件个数有6种 10分

$\therefore P(|m-n|>10) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$12分

18. 解: (I) 由 $a_1=9$, a_2 为整数可知, 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 为整数,

由 $S_n \leq S_5$, 知 $a_5 \geq 0$, $a_6 \leq 0$,

于是 $9+4d \geq 0$, $9+5d \leq 0$,

d 为整数, $\therefore d = -2$.

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 11 - 2n$ 6分

(II) 由 (I) 得 $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(11-2n)(9-2n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9-2n} - \frac{1}{11-2n} \right)$,

$$\therefore T_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{9-2n} - \frac{1}{11-2n} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9-2n} - \frac{1}{9} \right),$$

令 $b_n = \frac{1}{9-2n}$, 由函数 $f(x) = \frac{1}{9-2x}$ 的单调性, 知 $0 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4, b_5 < b_6 < b_7 < \dots < 0$,

$$\therefore b_n \leq b_4 = 1. \therefore T_n \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{9} \right) = \frac{4}{9} \quad \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

19. (I) 证明: 由已知得, $\frac{AB}{AD} = \frac{BB_1}{AB} = \sqrt{2}$, $\therefore \text{Rt}\triangle BAD \sim \text{Rt}\triangle ABB_1$

$\therefore \angle BDA = \angle B_1AB$, $\therefore \angle ABD + \angle B_1AB = \angle ABD + \angle BDA = 90^\circ$

\therefore 在 $\triangle AOB$ 中, $\angle AOB = 180^\circ - (\angle ABO + \angle OAB) = 90^\circ$, 即 $BD \perp AB_1$ 4分

另 $BC \perp AB_1$, $BD \cap BC = B$, $\therefore AB_1 \perp$ 平面 BCD , $CD \subset$ 平面 BCD ,

$\therefore CD \perp AB_1$ 6分

(II) 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB=1, AD=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore AO=\frac{\sqrt{3}}{3}$

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, 得 $BO=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

在 $\triangle BOC$ 中, $BO^2 + CO^2 = BC^2$, $\therefore \triangle BOC$ 为直角三角形,8分

$\therefore CO \perp BO$, 由 (I) 易知, 平面 $BCD \perp$ 平面 AA_1B_1B , 平面 $BCD \cap$ 平面 $AA_1B_1B = BD$

$\therefore CO \perp$ 平面 AA_1B_1B ,10分

\therefore 四面体 AA_1BC 的体积 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle AA_1B} \times OC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{18}$ 12分

20. 解: (I) 由题意知: $|EP| = |EA|$, $|CE| + |EP| = 2\sqrt{2}$, $\therefore |CE| + |EA| = 2\sqrt{2} > |CA| = 2$

$\therefore E$ 的轨迹是以 C, A 为焦点的椭圆, 其轨迹方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 4分

(II) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则将直线与椭圆的方程联立得: $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$, 消去 y ,

得: $(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0, \Delta > 0, m^2 < 2k^2 + 1$ ①

$$x_1 + x_2 = -\frac{4km}{2k^2 + 1}, x_1 x_2 = \frac{2m^2 - 2}{2k^2 + 1} \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

原点 O 总在以 PQ 为直径的圆的内部, $\therefore OP \cdot OQ < 0$, 即 $x_1 x_2 + y_1 y_2 < 0$ 7分

而 $y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = \frac{m^2 - 2k^2}{2k^2 + 1}$, $\therefore \frac{2m^2 - 2}{2k^2 + 1} + \frac{m^2 - 2k^2}{2k^2 + 1} < 0$ 9分

即 $m^2 < \frac{2k^2 + 2}{3}$, $\therefore m^2 < \frac{2}{3}$, 且满足①式, $\therefore m$ 的取值范围是 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$ 12分