广 州 高 山 文 化 培 训 学 校

2017 届数学堂练 12（理科）

2017.02.22

一、选择题（每题 5 分，共 60 分）

1．若复数 z 满足 $iz=1+2i$，其中 i 为虚数单位，则在复平面上复数 z 对应的点的坐标为（　）

A．$(-2,-1)$　　B．$(-2,1)$　　C．$(2,1)$　　D．$(2,-1)$

2．已知全集 $U=R$，集合 $A=\left\{x\middle|0<2^x<1\right\}$，$B=\left\{x\middle|\log_3 x>0\right\}$，则 $A\quad\left(C_U B\right)=$（　）

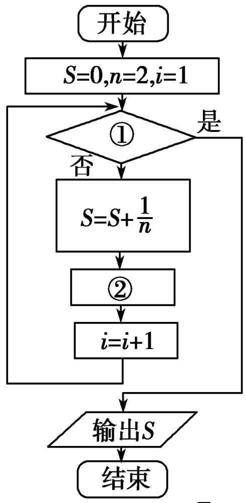
A．$\left\{x\middle|x<0\right\}$　　B．$\left\{x\middle|x>0\right\}$　　C．$\left\{x\middle|0<x<1\right\}$　　D．$\left\{x\middle|x>1\right\}$

3．已知 $\left\{a_n\right\}$ 为等比数列，$a_4+a_7=2$，$a_5\cdot a_6=-8$，则 $a_1+a_{10}=$（　）

A．7　　B．-7　　C．-5　　D．5

4．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点到一条渐近线的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}c$ (c 为双曲线的半焦距)，则双曲线的离心率为（　）

A．$\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　　B．$\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$　　C．$3\sqrt{7}$　　D．$\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$



5．如图给出了计算 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\qquad+\dfrac{1}{60}$ 的值的程序框图，其中①②分别是（　）

A．$i<30$，$n=n+2$　　B．$i=30$，$n=n+2$

C．$i>30$，$n=n+2$　　D．$i>30$，$n=n+1$

6．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\pi<\varphi<0)$ 的最小正周期是 π，将函数 $f(x)$ 图象向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度后所得的函数图象过点 $P(0,1)$，则函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（　）

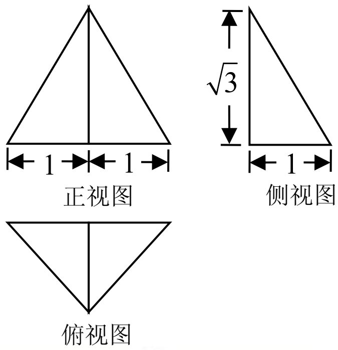
A．在区间 $[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$ 上单调递减　　B．在区间 $[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$ 上单调递增

C．在区间 $[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}]$ 上单调递减　　D．在区间 $[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}]$ 上单调递增

7．若 $\left(x^6+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中含有常数项，则 n 的最小值等于（　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

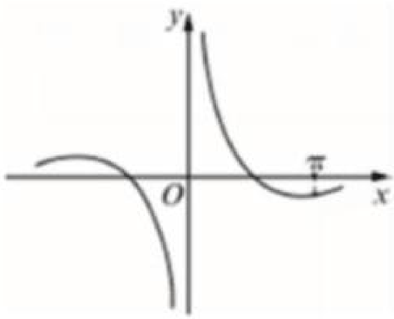
8．一个几何体的三视图如图所示，其中正视图是一个正三角形，则这个几何体的（　）



A．外接球的半径为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　　B．表面积为$\sqrt{7}+\sqrt{3}+1$

C．体积为$\sqrt{3}$　　　　D．外接球的表面积为4π

9．已知函数$f\left(x\right)$的部分图像如图所示，则$f\left(x\right)$的解析式可以是（　）



A．$f\left(x\right)=\dfrac{2-x^2}{2x}$　　　　B．$f\left(x\right)=\dfrac{\cos x}{x^2}$

C．$f\left(x\right)=-\dfrac{\cos^2 x}{x}$　　　　D．$f\left(x\right)=\dfrac{\cos x}{x}$

10．设x,y满足约束条件$\begin{cases}x+y\ge a\\x-y\le -1\end{cases}$，且$z=x+ay$的最小值为7，则$a=$（　）

A．-5　　B．3　　C．-5或3　　D．5或-3

11．已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的两条渐近线分别为$l_1$、$l_2$，经过右焦点$F$垂直于$l_1$的直线分别交$l_1$、$l_2$于$A$、$B$两点，若$\left|OA\right|$、$\left|AB\right|$、$\left|OB\right|$成等差数列，且$AF$与$FB$反向，则该双曲线的离心率为（　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\dfrac{5}{2}$

12．已知函数$F(x)=\ln x(x>1)$的函数与函数$G\left(x\right)$的图像关于直线$y=x$对称，设函数$f\left(x\right)$的导函数$f'(x)=\dfrac{G(x)}{x^4}-\dfrac{3f(x)}{x}(x>0)$，且$f'(3)=0$，则当$x>0$时，$f(x)$（　）

A．有极大值，无极小值　　　　B．有极小值，无极大值

C．既有极大值，又有极小值　　　　D．既无极大值，又无极小值

二、填空题（每题5分，共20分）

13．已知$\cos\left(75\ +\theta\right)=\dfrac{1}{3}$，$\theta$为第三象限角，则$\cos\left(-255\ -\theta\right)+\sin\left(435\ +\theta\right)$的值为________.

14．点P在曲线$y=x^3-x+\dfrac{2}{3}$上移动，设过点P的切线的倾斜角为α，则α的取值范围是________.

15．已知直角梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$\angle ADC=90^0$，$AD=2$，$BC=1$，P是腰DC上的动点，则$\left|PA+3PB\right|$的最小值为________.

16．在平面几何中有如下结论：正三角形 ABC 的内切圆面积为 S_1，外接圆面积为 S_2，则 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{4}$ 推广到空间可以得到类似结论；已知正四面体 $P-ABC$ 的内切球体积为 V_1，外接球体积为 V_2，则 $\dfrac{V_1}{V_2}=$________.

三、解答题：解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

17．设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=9$，a_2 为整数，且 $S_n\le S_5$.

（I）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）设数列 $\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n\le\dfrac{4}{9}$.

18．春节期间，某商场决定从 3 种服装、2 种家电、3 种日用品中，选出 3 种商品进行促销活动.

（I）试求选出的 3 种商品中至少有一种是家电的概率；

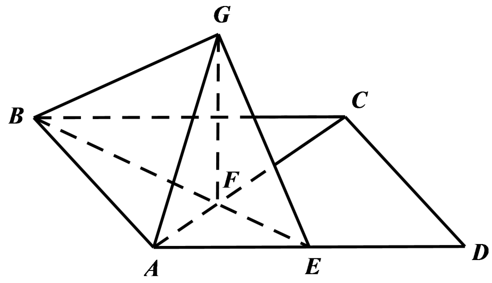
（II）商场对选出的某商品采用抽奖方式进行促销，即在该商品现价的基础上将价格提高 100 元，规定购买该商品的顾客有 3 次抽奖的机会；若中一次奖，则获得数额为 m 元的奖金，若中两次奖，则共获得数额为 $3m$ 元的奖金；若中 3 次奖，则共获得数额为 $6m$ 元的奖金；假设顾客每次抽奖中获的概率都是 $\dfrac{1}{3}$，

请问：商场将奖金数额 m 最高定为多少元，才能使促销方案对商场有利?

19．如图，四边形$ABCD$是矩形，$AB=1$，$AD=\sqrt{2}$，E是AD的中点，BE与AC交于点F，$GF\perp$平面$ABCD$.

（I）求证：$AF\perp$面BEG；

（II）若$AF=FG$，求直线EG与平面ABG所成角的正弦值.



20．已知点$A(1,0)$，点P是圆C：$(x+1)^2+y^2=8$上的任意一点，线段PA的垂直平分线与直线CP交于点E.

（I）求点E的轨迹方程；

（II）若直线$y=kx+m$与点E的轨迹有两个不同的交点P和Q，且原点O总在以PQ为直径的圆的内部，求实数m的取值范围.

广 州 高 山 文 化 培 训 学 校

2017 届数学堂练 12 答卷（理科）

2017.02.22

姓名__________　　班别__________　　学号__________

二、填空题（每题 5 分，共 20 分）

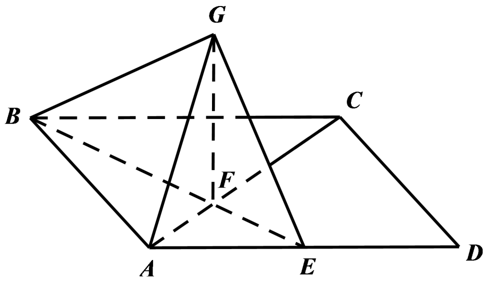
13．____________　14．____________　15．____________　16．____________

三、解答题：解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤．

17．（12 分）

18．（12 分）

19.（12 分）



20.（12 分）

广 州 高 山 文 化 培 训 学 校
2017 届数学堂练 12 答案（理科）

2017.02.22

一、选择题（每题 5 分，共 60 分）

1—5DABDC　　6—10BCBDB　　11—12CD

二、填空题（每题 5 分，共 20 分）

13．$-\dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$　　14．$[0,\dfrac{\pi}{2})$　$[\dfrac{3\pi}{4},\pi)$　　15．5　　16．$\dfrac{1}{27}$

三、解答题

17．解：（I）由 $a_1=9$，a_2 为整数可知，等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 为整数，

由 $S_n \le S_5$，知 $a_5 \ge 0$，$a_6 \le 0$，

于是 $9+4d \ge 0$，$9+5d \le 0$，

d 为整数，$\therefore d=-2$．

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=11-2n$　　………6 分

（II）由（I）得 $\dfrac{1}{a_n a_{n+1}}=\dfrac{1}{(11-2n)(9-2n)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{9-2n}-\dfrac{1}{11-2n}\right)$，

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+......+\left(\dfrac{1}{9-2n}-\dfrac{1}{11-2n}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{9-2n}-\dfrac{1}{9}\right)$，

令 $b_n=\dfrac{1}{9-2n}$，由函数 $f(x)=\dfrac{1}{9-2x}$ 的单调性，知

$0<b_1<b_2<b_3<b_4$，$b_5<b_6<b_7<...<0$，$\therefore b_n \le b_4=1$．

$\therefore T_n \le \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{4}{9}$　　………12 分

18．解：（I）设选出的 3 种商品中至少有一种是家电为事件 A，

从 3 种服装、2 种家电、3 种日用品中，选出 3 种商品，一共有 C_8^3 种不同的选法，　　………2 分

选出的 3 种商品中，没有家电的选法有 C_6^3 种　　………3 分

所以，选出的 3 种商品中至少有一种是家电的概率为 $P(A)=1-\dfrac{C_6^3}{C_8^3}=\dfrac{9}{14}$　　………5 分

（II）设顾客三次抽奖所获得的奖金总额为随机变量 ξ，

其所有可能的取值为 0、m、$3m$、$6m$．(单元:元)　　………6 分

$\xi=0$ 表示顾客在三次抽奖都没有获奖，所以 $P(\xi=0)=(1-\dfrac{1}{3})^3=\dfrac{8}{27}$

同理，$P(\xi=m)=C_3^1\times(1-\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$，

$P(\xi=3m)=C_3^2\times(1-\frac{1}{3})^1\times(\frac{1}{3})^2=\frac{2}{9}$，

$P(\xi=6m)=C_3^3\times(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$ ………9 分

顾客在三次抽奖中所获得的奖金总额的期望值是

$E(\xi)=0\times\frac{8}{27}+m\times\frac{4}{9}+3m\times\frac{2}{9}+6m\times\frac{1}{27}=\frac{4}{3}m$ ………10 分

由 $\frac{4}{3}m\le 100$，解得 $m\le 75$ ………11 分

所以故 m 最高定为 75 元，才能使促销方案对商场有利． ………12 分

19.（I）证法 1：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$\therefore \Delta AEF\backsim\Delta CBF$，$\therefore \frac{AF}{CF}=\frac{EF}{BF}=\frac{AE}{BC}=\frac{1}{2}$ ………1 分

又$\because$矩形 $ABCD$ 中，$AB=1, AD=\sqrt{2}$，$\therefore AE=\frac{\sqrt{2}}{2}, AC=\sqrt{3}$

在 $Rt\Delta BEA$ 中，$BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore AF=\frac{1}{3}AC=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$BF=\frac{2}{3}BE=\frac{\sqrt{6}}{3}$

在 ΔABF 中，$AF^2+BF^2=(\frac{\sqrt{3}}{3})^2+(\frac{\sqrt{6}}{3})^2=1=AB^2$

$\therefore \angle AFB=90$，即 $AC\perp BE$ ………3 分

$\because GF\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore AC\perp GF$ ………4 分

又$\because BE\ \ \ GF=F$，$BE,GF\subset$ 平面 BCE，$\therefore AF\perp$ 平面 BEG ………5 分

证法 2：(坐标法)证明 $K_{AC}\cdot K_{BE}=-1$，得 $AC\perp BE$，往下同证法 1．

证法 3：(向量法)以 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$ 为基底，

$\because \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\frac{1}{2}\times 2-1=0$

$\therefore AC\perp BE$，往下同证法 1．

（II）在 $Rt\Delta AGF$ 中，$AG=\sqrt{AF^2+GF^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2+(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

在 $Rt\Delta BGF$ 中，$BG=\sqrt{BF^2+GF^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{3})^2+(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=1$ ………7 分

在 ΔABG 中，$AG=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$BG=AB=1$

$\therefore S_{\Delta ABG}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{1-(\frac{\sqrt{6}}{6})^2}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{30}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{6}$ ………9 分

设点 E 到平面 ABG 的距离为 d，

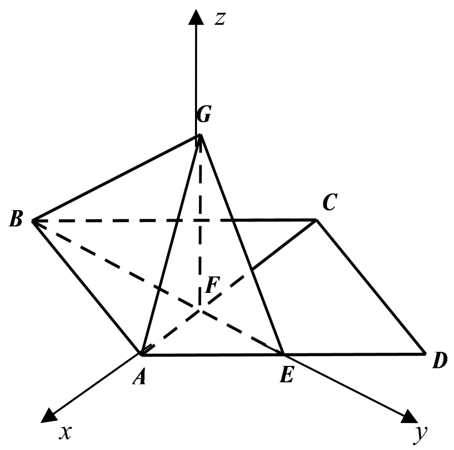
则 $\frac{1}{3}S_{\Delta ABG}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\Delta ABF}\cdot GF$，$\therefore d=\frac{S_{ABF}\cdot GF}{S_{\Delta ABG}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{6}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$

$EG=\sqrt{GF^2+EF^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2+(\frac{\sqrt{6}}{6})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ………11 分

设直线 EG 与平面 ABG 所成角的大小为 θ，

则 $\sin\theta=\frac{d}{EG}=\frac{\frac{\sqrt{30}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$. ………12 分

另法：由（I）得 AD,BE,FG 两两垂直，以点 F 为原点，FA,FE,FG 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系， ………6 分



则 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,0\right)$，$B\left(0,-\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$，$G\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$E\left(0,\frac{\sqrt{6}}{6},0\right)$，

$\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$，$\overrightarrow{AG}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

$\overrightarrow{EG}=\left(0,-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$， ………8 分

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 ABG 的法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AG}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{6}}{3}y=0\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}z=0\end{cases}$，取 $x=\sqrt{2}$，得 $\vec{n}=(\sqrt{2},-1,\sqrt{2})$ ………10 分

设直线 EG 与平面 ABG 所成角的大小为 θ，

则 $\sin\theta=\frac{\left|\overrightarrow{EG}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{EG}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|0\times\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}\times(-1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{2}\right|}{\sqrt{0+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{2+1+2}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

$\therefore$ 直线 EG 与平面 ABG 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. ………12 分

20．解：（I）由题意知：$|\mathrm{EP}|=|\mathrm{EA}|$，$|\mathrm{CE}|+|\mathrm{EP}|=2\sqrt{2}$，

$\therefore |\mathrm{CE}|+|\mathrm{EA}|=2\sqrt{2}>|\mathrm{CA}|=2$

$\therefore$ E 的轨迹是以 C 、A 为焦点的椭圆，其轨迹方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ………4 分

（II）设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则将直线与椭圆的方程联立得：$\begin{cases} y=kx+m \\ x^2+2y^2=2 \end{cases}$，

消去 y，得：$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，$\Delta>0$，$m^2<2k^2+1$ ………①

$x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{2k^2+1}$ ………6 分

原点 O 总在以 PQ 为直径的圆的内部，

$\therefore \mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}<0$ 即 $x_1x_2+y_1y_2<0$ ………7 分

而 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=\dfrac{m^2-2k^2}{2k^2+1}$，

$\therefore \dfrac{2m^2-2}{2k^2+1}+\dfrac{m^2-2k^2}{2k^2+1}<0$ ………9 分

即 $m^2<\dfrac{2k^2+2}{3}$，$\therefore m^2<\dfrac{2}{3}$，且满足①式，

m 的取值范围是 $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ………12 分